数理解析研究所講究録
922巻 1995年 82-98

力学的自由境界問題に於ける リー・ポアソン構造とリーマン構造

Lie-Poisson and Riemannian Structures for Dynamic Free Boundary Problems

東京大学理学系研究科

小野 俊彦

Department of Physics, Graduate School of Science, University of Tokyo

Toshihiko Ono

Abstract

この報告は、流体の運動を群論及び微分幾何学的に扱う方法の概要を紹介し、そのような方法が自由に動く境界をもつ流体の運動にも適用が可能であることを指摘する。また、この方法が不可逆な過程に対しても使えるかを考察する。

Contents

Section 1 はじめに

Section 2 半直積リー群上の力学の一般論

2-1. 半直積リー群
2-2. 片側不変性とリー・ポアソン構造
2-3. リーマン構造
2-4. モーメント写像
2-5. 不安定性の解析

Section 3 完全流体の力学

3-1. 微分同相写像群
3-2. 非圧縮性完全流体
3-3. 圧縮性完全流体
3-4. 完全電磁流体
3-5. 自由境界問題

Section 4 不可逆系への挑戦

Section 5 おわりに

References

Section 1　　はじめに

特に完全流体に対する流体力学の方程式のうらにはある対称性が存在します。よく知られているように、このような対称性は対応する保存量（電荷）を持ち、その力学系の変数の数を減らします。特に、十分な保存量がある可積分系の場合、運動方程式は完全に解くことができますが、三体問題のように可積分系でない場合でも、対称性は解の振る舞いを知る上で貴重な情報を与えてくれます(ただし、今報告では保存量については議論しません)。

流体の運動に対する対称性の一般的な研究は一部の数学(幾何学)者によって進展させられてきましたが、物理学としてはあまり注目されてこなかったのではないかと思います。その理由として、

1. 理論の基礎となる無限次元の微分幾何学に馴染みが少ない。
2. 具体的な問題に対する理論の実用性があまり認められない。
3. 理論がかなり限定された流体系にしか適用できないと考えられている。

などと幾つか挙げられまが、今回は 3 について多少の解決の見通しをつけたいと考えます。

ところで、圧縮性流体は対称性の群として半直積リー群を持っています。このような半直積群は、それ以外にも、剛体やコマの運動、電磁流体の運動、多成分プラズマのブラソフ方程式系、浅水波のKdV方程式系、電磁場などの運動を含む古典ヤン・ミルズ方程式系など、数々の重要な物理系の対称性に関わっています。このような場合、力学系はモーメント写像によって簡約されることが知られています。Section 2 では、この「簡約」の代わりにむしろ「拡大」を行う試みをします。この結果、得られるリー・ポアソン方程式は運動方程式を与えます。

また、Section 2 において、多くの力学系の運動方程式が測地線方程式としても得られることを示します。これによって、有限な変分に対して非線形の不安定性を調べることができることを指摘します。

流体系に対する議論は Section 3 で行い、不可逆な系への理論の適用の可能性は Section 4 で議論します。

尚、私をこの分野へと導いて下さった神部勉教授、ならびに、電磁流体に関連した問題で有益な助言を与えて下さった服部裕司氏に厚く御礼申しあげます。

Section 2　　半直積リー群上の力学の一般論

2-1. 半直積リー群

まず、リー群 G と G が左表現 $\rho : G \to Aut(V)$ で作用するベクトル空間 V との半直積 $S = G \times_\rho V$ を定義します。$\Phi_1 = (\phi_1, \sigma_1), \Phi_2 = (\phi_2, \sigma_2) \in S$ の積は、

$$\Phi_1 * \Phi_2 = (\phi_1\phi_2, \sigma_1 + \rho(\phi_1)\sigma_2) \tag{2.1}$$

このリー代数 s の元 $V_1 = (\mathrm{v}_1, \omega_1)$, $V_2 = (\mathrm{v}_2, \omega_2) \in s$ のリー括弧積は、表現 ρ によって誘導されるリー代数表現 $\rho : s \to End(V)$ に対して、

$$[V_1, V_2] = ([\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2], \rho'(\mathrm{v}_1)\omega_2 - \rho'(\mathrm{v}_2)\omega_1) \tag{2.2}$$

となります。また、リー代数 s の相対空間を s^* とします。

ここで、この半直積リー群 S はリー群 G のベクトル空間 V による一つのリー群の拡大を与えていて、次のような完全系列をつくります。

$$\{e\} \to G \to S \to V \to \{0\} \tag{2.3}$$

ところで、半直積リー群 S は多様体であり、接空間 TS を考えることができます。このとき、$T_\Phi S$ ($\Phi \in S$) の元と $s \cong T_{(e,0)}S$ の元とを左または右リー移動によって関係づけることで、$V \in s$ について次の二種類のベクトルの表現が得られます。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}F(\Phi * e^{\tau V}) &= V|_\Phi F(\Phi * e^{\tau V}) \\ \frac{d}{d\tau}F(e^{\tau V} * \Phi) &= V|^\Phi F(e^{\tau V} * \Phi) \end{aligned} \tag{2.4}$$

$V|_\Phi$, $V|^\Phi \in T_\Phi S$ をそれぞれ左不変ベクトル、右不変ベクトルと呼びます。以下では、一般論では左不変ベクトルを、流体の運動についても右不変ベクトルを用いますが、逆でも符号を除いて同じ結果を導きます。

つぎに、余接空間 T^*S に対して $T^*_\Phi S$ の元を、自然な積 $\langle\, ,\, \rangle|_\Phi$: $T_\Phi S \times T^*_\Phi S \to R$ と共に、自然な積 $\langle\, ,\, \rangle$: $s \times s^* \to R$ によって $s^* \cong T^*_{(e.0)}S$ の元と関係づけることで、$J \in s^*$ について次のように定義します。

$$\begin{aligned} \langle J|_\Phi\, V|_\Phi \rangle|_\Phi &= \langle J\ ,\ V \rangle \\ \langle J|^\Phi\, V|^\Phi \rangle|^\Phi &= \langle J\ ,\ V \rangle \end{aligned} \tag{2.5}$$

$J|_\Phi$, $J|^\Phi \in T^*_\Phi S$ はそれぞれ左不変コベクトル、右不変コベクトルです。

2-2. 片側不変性とリー・ポアソン構造

さて、このリー群の接空間 TS 上の曲線 $\hat{C}: I \subset R \to TS$ (I: *an open interval*) の族 C の作用 $S: C \to R$ とラグランジュ関数 $L: TS \to R$ を考えましょう。左不変ベクトル $V_t\big|_{\Phi_t} \in T_{\Phi_t}S$ に対して局所的に $\hat{C}(t) = (\Phi_t, V_t\big|_{\Phi_t}) \in TS$ と書ける場合、

(2.6) $$S(\hat{C}) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\Phi_t, V_t\big|_{\Phi_t})$$

となります。ここで、ラグランジュ関数L が左不変であるとは、L がΦ_t に陽に依存しない場合です。つまり、$\hat{C}(t) = (\Phi_t, V_t\big|_{\Phi_t}) \in TS$ において、

(2.7) $$S(\hat{C}) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(V_t\big|_{\Phi_t})$$

となる場合です。この右リー移動による変分をとり、$J_t\big|_{\Phi_t} = \dfrac{\partial L(V_t\big|_{\Phi_t})}{\partial V_t\big|_{\Phi_t}} \in T^*_{\Phi_t}S$ とおくと、次の運動方程式が得られます。

(2.8) $$\frac{d}{dt} J_t = ad^*_{V_t} J_t$$

他方、ハミルトン関数 $H(J_t\big|_{\Phi_t}) = \left\langle J_t\big|_{\Phi_t} V_t\big|_{\Phi_t} \right\rangle\Big|_{\Phi_t} - L(V_t\big|_{\Phi_t})$ は、左不変性から s^* 上の関数とみなせます。

(2.9) $$H(J_t\big|_{\Phi_t}) = H(J_t)$$

このとき、$V_t = \dfrac{\partial H(J_t)}{\partial J_t}$ となり、運動方程式は、

(2.10) $$\frac{d}{dt} J_t = ad^*_{\frac{\partial H(J_t)}{\partial J_t}} J_t$$

具体的には、

(2.11) $$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_t &= ad^*_{\frac{\partial H}{\partial m_t}} m_t - (\rho'_{\frac{\partial H}{\partial \chi_t}})^* \chi_t \\ \frac{d}{dt} \chi_t &= \rho'(\frac{\partial H}{\partial m_t})^* \chi_t \end{aligned}$$

これから、次のようなリー・ポアソン方程式が得られます。

(2.12) $$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(J_t) &= \{H, F\}(J_t) \\ &= \left\langle J_t, \left[\frac{\partial H(J_t)}{\partial J_t}, \frac{\partial F(J_t)}{\partial J_t}\right]\right\rangle \end{aligned}$$

2-3. リーマン構造

ところで、多くの重要な物理現象において、$J_t=(m_t,\chi_t)\in s^*$ に対する左不変ハミルトニアンは、

$$H(J_t)=\frac{1}{2}\left\langle J_t, g(\chi_t)^{-1}J_t\right\rangle \tag{2.13}$$

という形をしています。ここで、$g(\chi_t)$: $s\times s\to R$ は s 上に非退化なユークリッド構造を与えます。

ここで、注意するのは、(2.11)の運動方程式の第二式の解が次のように求められることです。

$$\chi_t=\rho(\Phi_t)\chi_0\in s^* \tag{2.14}$$

このことから、(2.13) の代わりに $J_t\in s^*$ について 2 次の形をした次のハミルトニアンを用いても良いことが分かります。

$$H(\Phi_t, J_t|_{\Phi_t})=\frac{1}{2}\left\langle J_t, g_{\Phi_t}{}^{-1}J_t\right\rangle \tag{2.15}$$

ただし、$g_\Phi=g(\chi_\Phi)$ で、得られたハミルトニアン (2.15) はもはや左不変ではありません。

ハミルトニアン (2.15) は、このような力学系をリーマン多様体上の測地線とみることを可能にします。その場合、S 上に内積つまり計量は次のように与えます。

$$\left\langle\!\left\langle V_1|_\Phi, V_2|_\Phi\right\rangle\!\right\rangle\Big|_\Phi=\left\langle g_\Phi V_1, V_2\right\rangle \tag{2.16}$$

ただし、$\Phi\in S$ 、$\chi_\Phi=\rho(\Phi)\chi_0\in s^*$ です。

計量 (2.15) の平行移動による不変性と捻れ率がゼロであることから導かれるリーマン (レビ・チビタ) 接続 $\hat{\nabla}$ は次のような共変微分を与えます。

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_{V_1|_\Phi}V_2|_\Phi&=\frac{1}{2}\left\{\left[V_1,V_2\right]-g_\Phi^{-1}ad^*_{V_1}g_\Phi V_2-g_\Phi^{-1}ad^*_{V_2}g_\Phi V_1\right\}\Big|_\Phi\\&+\frac{1}{2}\left\{-g_\Phi^{-1}g'_\Phi V_2V_1+g_\Phi^{-1}\{g_\Phi^{-1}g'_\Phi V_2\}^*g_\Phi V_1+g_\Phi^{-1}\{g_\Phi^{-1}g'_\Phi V_2\}^*g_\Phi V_1\right\}\Big|_\Phi\end{aligned} \tag{2.17}$$

これによって得られる測地線方程式

$$\hat{\nabla}_{V_t|_{\Phi_t}}V_t|_{\Phi_t}=0 \tag{2.18}$$

が運動方程式 (2.10) に等しいことが証明されています (文献 [O2])。

2-4. モーメント写像

より一般的には、粒子が運動する空間は半直積群 S 自身よりも半直積群S が作用する多様体 Σ です。今、この多様体 Σ を G が作用する多様体 Π の上の V の部分ベクトル空間 Λ による局所的に自明なファイバー束とします。ここで、半直積群 S の元 $\Phi=(\phi,\sigma)\in S$ は多様体 $T^*\Sigma$ の元 $X=\left(x,\alpha|_x\right)\in T^*\Sigma$ に次のように右から作用します。

(2.19) $$X\Phi=\left(x\phi,(\sigma+\rho(\phi)\alpha)|_{x\phi}\right)$$

ここで、この力学系のハミルトニアン $H_{T^*\Sigma}:T^*\Sigma\to R$ が次のように s^* 上のハミルトニアン $H:s^*\to R$ によって書ける場合を考えます。

(2.20) $$H_{T^*\Sigma}(\alpha_t|_{X_t})=H(\tilde{J}(\alpha_t|_{X_t}))$$

ただし、このハミルトニアンは$X_t=X_0\Phi_t\in\Sigma$ に陽に依存せず、 $\alpha_t|_{X_t}\in T^*_{X_t}\Sigma$ にのみ依存しています。ここであらわれた写像 $\tilde{J}:T^*\Sigma\to s^*$ はモーメント写像と呼ばれるものの特別な場合で、$V\in s$ に対応する無限小生成子のベクトル場 $\xi_V\in X(M)$ に対して次のように定義されます。

(2.21) $$\left\langle\tilde{J}(\alpha|_X),V\right\rangle=\left\langle\alpha|_X,\xi_V(X)\right\rangle|_X$$

多くの場合、このモーメント写像は次の性質を持ちます。

(2.22) $$Ad^*_\Phi\tilde{J}(\alpha|_X)=\tilde{J}(\rho_{T^*\Sigma}(\Phi)^*\alpha|_X)$$

このときモーメント写像 $\tilde{J}$: $T^*\Sigma\to s^*$ はAd^* －同値なモーメント写像と呼ばれます。このようにして、$T^*\Sigma$ 上の力学を s^* 上の力学として扱うことが可能になります。

今の場合、(2.10) の運動方程式は次のようになります。

(2.23) $$\frac{d}{dt}\tilde{J}(\alpha_t|_{X_t})=ad^*_{\frac{\partial H(J(\alpha_t|_{X_t}))}{\partial\tilde{J}(\alpha_t|_{X_t})}}\tilde{J}(\alpha_t|_{X_t})$$

ここで、 もし、$\Sigma=S$ ならば、モーメント写像 $\tilde{J}_L:T^*S\to s^*$ は S の単位元への左移動に対応していることに注意しましょう。

さて、なんらかの方法によって、今のハミルトニアンが次のように表される場合を考えましょう。

(2.24) $$H_{T^*\Sigma}(\alpha_t|_{X_t})=\frac{1}{2}\left\langle\alpha_t|_{X_t},g_{X_t}{}^{-1}\alpha_t|_{X_t}\right\rangle|_{X_t}$$

このようなハミルトニアンは、力学系をリーマン多様体上の測地線とみることを可能にします。その場合、S 上に内積つまり計量は次のように与えます。

(2.25)
$$\left\langle\left\langle V_1\big|_\Phi, V_2\big|_\Phi\right\rangle\right\rangle\Big|_\Phi = \left\langle g_\Phi V_1, V_2\right\rangle$$

これから得られるリーマン接続 $\hat{\nabla}$ によって運動方程式は次のようになります。

(2.26)
$$\hat{\nabla}_{V_t|_{X_t}} V_t\big|_{X_t} = 0$$

2-5. 不安定性の解析

力学系の不安定性を調べる方法としては、

1. リー・ポアソン方程式で表される余随伴軌道についての変分をとる。
2. 測地線方程式で表される測地線についての変分をとる。

という 2 種類の方法があります。勿論、これらを組み合わせた変分の取り方も可能かもしれません。(2.23) の有限な変分は次式のように得られます。

(2.27)
$$\frac{d}{dt}\tilde{J}(\alpha_t\big|_{X_t} + \varepsilon\chi_t\big|_{X_t}) = ad^*_{\frac{\partial H\circ J}{\partial \tilde{J}}(\alpha_t|_{X_t} + \varepsilon\chi_t|_{X_t})}\tilde{J}(\alpha_t\big|_{X_t} + \varepsilon\chi_t\big|_{X_t})$$

$\varepsilon \to 0$ の極限で線形化された式が得られます。

この方法では線形の範囲での 1 の意味における不安定性の分析しかできず、非線形の範囲で一般的に意味のある不安定性の分析が得られないことに注意しましょう。また、(2.27) 以外にも変分の取り方はありますが、それらの変分についての議論は今回は見送ります。

一方、(2.26) の有限な変分はリー群の性質を用いて次式のように得られます(文献 [O2])。

(2.28)
$$\hat{\nabla}_{V_t^\varepsilon|_{X_0\Phi_t e^{\varepsilon W_t}}} V_t^\varepsilon\big|_{X_0\Phi_t e^{\varepsilon W_t}} = 0$$

ただし、

(2.29)
$$V_t^\varepsilon\big|_{X_0\Phi_t e^{\varepsilon W_t}} = V_t\big|_{X_0\Phi_t e^{\varepsilon W_t}} + \varepsilon\left[V_t\big|_{X_0\Phi_t e^{\varepsilon W_t}}, W_t\big|_{X_0\Phi_t e^{\varepsilon W_t}}\right]$$

$\varepsilon \to 0$ の極限で次のようなヤコビ方程式が得られます。

(2.30) $$\hat{\nabla}_{V_t|_{X_t}} \hat{\nabla}_{V_t|_{X_t}} W_t|_{X_t} = -\hat{R}(W_t|_{X_t}, V_t|_{X_t}) V_t|_{X_t}$$

ここで、$\hat{R}$ は計量 (2.25) による曲率テンソルです。これより、次の式が成り立ちます。

(2.31) $$\frac{d^2}{dt^2}\left\langle\!\left\langle W_t|_{X_t}, W_t|_{X_t} \right\rangle\!\right\rangle\Big|_{X_t} = 2\left\langle\!\left\langle \hat{\nabla}_{V_t|_{X_t}} W_t|_{X_t}, \hat{\nabla}_{V_t|_{X_t}} W_t|_{X_t} \right\rangle\!\right\rangle\Big|_{X_t} - \left\langle\!\left\langle W_t|_{X_t}, \hat{R}(W_t|_{X_t}, V_t|_{X_t}) V_t|_{X_t} \right\rangle\!\right\rangle\Big|_{X_t}$$

つまり、次の断面曲率に対する条件が成り立つならば、この力学系が 2 の意味で、線形の範囲で不安定であることになります。

(2.32) $$\left\langle\!\left\langle W_t|_{X_t}, \hat{R}(W_t|_{X_t}, V_t|_{X_t}) V_t|_{X_t} \right\rangle\!\right\rangle\Big|_{X_t} \leq 0$$

しかし、次の条件が満たされるような変分に対しては、上のヤコビ方程式は<u>有限な変分</u>についても成り立ち、断面曲率の計算は<u>有限な変分</u>による<u>非線形不安定性</u>の指標になります。

(2.33) $$\hat{\nabla}_{[W_t|_{X_t}, V_t|_{X_t}]}\left[W_t|_{X_t}, V_t|_{X_t}\right] = 0$$

このことは今回の報告で始めて指摘されたことで、例えば、非圧縮性流体について文献 [KNH] で調べられた次の条件を満たす変分は、上の条件より狭い条件

(2.34) $$\left[W_t|_{X_t}, V_t|_{X_t}\right] = 0$$

になっていて、実は有限な変分についての不安定性の分析をしたことになります(ただし、彼らは異なった方法で変分をとっていますので、そのままでは有限変分についての安定性を調べたことになりませんが)。

Section 3 完全流体の力学

3-1. 微分同相写像群

流体の運動は、流体が入っている境界を持たない N 次元の物理空間 M の各点が運動するとしてラグランジュ的に扱うことができます。この各点の運動は完全にでたらめではなく、互いに重なることなく空間全体を占めるような運動でなくてはなりません。つまり、このような M の各点の運動は微分同相写像(微分可能で連続な写像)によって表されることになります。特に、以下では、C^∞ 微分同相写像に限定します(より一般的な微分同相写像を用いる場合の注意は文献 [MRW] にあります)。

物理空間 M 上の C^∞ 微分同相写像のなす集合を $Diff(M)$ とすると、$Diff(M)$ は無限次元リー群になっています。 つまり、 $Diff(M)$ の元 $\phi_1, \phi_2 \in Diff(M)$ の間の積 $\phi_1 \circ \phi_2$ は、

$$\phi_1 \circ \phi_2(x) = \phi_1(\phi_2(x)) \tag{3.1}$$

で定義され、 $Diff(M)$ の位相は逆極限位相と呼ばれるものになっています。

$Diff(M)$ の表現として有用なのは、M 上のベクトル場のつくる空間 $X(M)$ 上の作用への引き戻し (**pull-back**) です。この引き戻された $Diff(M)$ の元の無限小生成子であるリー微分のつくる空間は $X(M)$ に等しくなります。このように、このリー代数 $diff(M)$ の元 $u_1, u_2 \in diff(M)$ のリー括弧積は、対応する $X(M)$ の元 $u_1^i(x)\partial_i, u_2^i(x)\partial_i$ $\in X(M)$ の交換積を用いて表されます。

$$[u_1, u_2] = -[u_1^i(x)\partial_i, u_2^i(x)\partial_i] \tag{3.2}$$

流体の速度場は丁度このリー代数 $diff(M)$ の元とみなされます。

さて、リー代数 $diff(M)$ の相対空間を $diff^*(M)$ としましょう。この相対空間の元を N 形式と 1 形式との直積とみなすことができます。つまり、今の表現は、

$$\begin{aligned} diff(M) &\to X(M) \\ diff^*(M) &\to \Lambda^N(M) \otimes \Lambda^1(M) \end{aligned} \tag{3.3}$$

です。例えば、流体の体積 N 形式と運動量場の 1 形式の直積が $diff^*(M)$ の元とみなされます。

3-2. 非圧縮性完全流体

非圧縮性流体の場合、流体の速度場は次のようなダイバージェンス・フリーの条件を常に満たさなくてはなりません。

$$\partial^j u_j(x) = 0 \tag{3.4}$$

良く知られているように、これは流体の体積測度の保存を意味します。$Diff(M)$ の元の中で上の条件を満たすものの集合 $SDiff_v(M)$ は $Diff(M)$ の部分リー群をなしています。このことは、条件 (3.4) を満たす二つベクトル場の交換積をとって得られたベクトル場もまた条件 (3.4) を満たすことから分かります。

$$SDiff_v(M) \underset{subgroup}{\subset} Diff(M) \tag{3.5}$$

前章との比較では、非圧縮性完全流体の運動の場合、

$$G = \Sigma = SDiff_v(M) \tag{3.6}$$

となり、ハミルトニアンは次のようになります(文献 [MW])。

$$H(u) = \frac{1}{2}\int_M v_x g_{ij}(x) u_t^i(x) u_t^j(x) \tag{3.7}$$

これは右不変で、流体の場合に左不変ではなく右不変のハミルトニアンを考えるのは、理論が流体粒子自身の運動の代わりに空間の各点または座標の運動を扱っている為です。事実、このような意味で、剛体の様々な運動 (これらは左不変のハミルトニアンをもつ) は流体の運動の特別な場合となります。

また、非圧縮性完全流体の運動に対応するリーマン構造は次のように与えられます(文献 [Ar 1, 2])。

$$\left\langle\!\left\langle u_1\big|_\phi, u_2\big|_\phi \right\rangle\!\right\rangle\Big|_\phi = \int_M v_x g_{ij}(x) u_1^i(x) u_2^j(x) \tag{3.8}$$

以上のように、非圧縮性完全流体の運動方程式は $sdiff_v^*(M)$ の上のリー・ポアソン方程式のみならず、$SDiff_v(M)$ 上の測地線方程式としても得られます (文献 [Ar1, 2] や文献 [EM] と異なった方法は文献 [O1] にあります)。

3-3. 圧縮性完全流体

非圧縮性流体の場合とは違って、圧縮性流体の場合は質量密度の変化やエントロピー密度の変化も考慮しなくてはなりません。従って、微分同相写像群 $Diff(M)$ を 2 つの関数の線形空間 $\Lambda^0(M)$ との半直積群 $S(M) = Diff(M) \times_* \{\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^0(M)\}$ へと拡大する必要があります(古くから知られている拡大しない方法もあります)。つまり、次の完全系列を得ます。

$$\{e\} \to Diff(M) \to Diff(M) \times_* \{\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^0(M)\} \to \Lambda^0(M) \oplus \Lambda^0(M) \to \{0\} \tag{3.9}$$

この半直積群の元 $\Phi_1 = (\phi_1, \sigma_1)$, $\Phi_2 = (\phi_2, \sigma_2) \in S(M)$ の間の積 $\Phi_1 * \Phi_2$ は、

$$\Phi_1 * \Phi_2 = (\phi_1 \circ \phi_2, \sigma_1 + \phi_1^* \sigma_2) \in S(M) \tag{3.10}$$

となります。また、$Diff(M)$ の表現として M 上のベクトル場のつくる空間 $X(M)$ 上の作用への引き戻し (**pull-back**) を用いると、$S(M)$ のリー代数 $s(M)$ の元 $V_1 = (u_1, U_1)$, $V_2 = (u_2, U_2) \in s(M)$ のリー括弧積は、次の交換積を用いて表されます。

$$[V_1,\ V_2] = -\left([u_1^i(x)\partial_i,\ u_2^i(x)\partial_i], L_{u_1^i(x)\partial_i} U_2(x)\nu_x - L_{u_1^i(x)\partial_i} U_2(x)\nu_x\right) \tag{3.12}$$

また、リー代数 $s(M)$ の相対空間を $s^*(M)$ とすると、今の表現は、

$$\begin{gathered} s(M) \to X(M) \times \{\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^0(M)\} \\ s^*(M) \to \{\Lambda^N(M) \otimes \Lambda^1(M)\} \times \left\{\Lambda^N(M) \oplus \Lambda^N(M)\right\} \end{gathered} \tag{3.13}$$

です。

前章との比較では、圧縮性完全流体の等エントロピー流の場合、

$$G = s(M),\quad \Sigma = Diff(M) \times_* \Lambda^0(M) \tag{3.14}$$

となり、右不変ハミルトニアンは次のようになります(文献 [HK], [MRW])。

$$H = \frac{1}{2}\int_M \nu_x \{\rho_t(x) g_{ij} u_t^i(x) u_t^j(x) + 2\rho_t(x) U(\rho_t(x), s_t(x))\} \tag{3.15}$$

ここで、$\rho_t(x)$, $s_t(x)$ はそれぞれ質量密度とエントロピー密度に対応しています。

また、この圧縮性完全流体の運動に対応するリーマン構造は次のように与えられます(文献 [O2])。

$$\left\langle\!\left\langle V_1\big|_\phi, V_2\big|_\phi \right\rangle\!\right\rangle\Big|_\phi = \int_M \nu_x \rho_\phi(x) g_{ij}(x) u_1^i(x) u_2^j(x) + \int_M \nu_x \frac{2\rho_\phi(x)}{U(\rho_\phi(x), s_\phi(x))} U_1(x) U_2(x) \tag{3.16}$$

以上のように、非圧縮性完全流体の運動方程式は $s^*(M)$ の上のリー・ポアソン方程式のみならず、$Diff(M) \times_* \Lambda^0(M)$ 上の測地線方程式としても得られます。

3-4. 完全電磁流体

完全電磁流体への拡張について触れておきます。非圧縮性電磁流体の運動に対しては、

$$G = \Sigma = SDiff(M) \times_* \Lambda^1(M) \tag{3.17}$$

となり、圧縮性電磁流体の運動に対しては、

$$\begin{aligned} G &= SDiff(M) \times_* \{\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^0(M) \oplus \Lambda^1(M)\} \\ \Sigma &= SDiff(M) \times_* \{\Lambda^0(M) \oplus \Lambda^1(M)\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

また、これらの運動のハミルトニアンは、(3.7), (3.15) のハミルトニアンにそれぞれ次の項を加えたものになります(文献 [MRW])。

$$\frac{1}{2}\int_M \frac{1}{\mu}\{B_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j\} \wedge {}^*\{B_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j\} \tag{3.19}$$

ただし、$B_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j = d(A_i(x)dx^i)$ は磁束密度 2 形式です。

さらに、対応するリーマン構造は、(3.8), (3.16) の内積の定義に次の項を加えたもので与えられます(文献 [O1, 2])。

$$\frac{1}{2}\int_M \mu\ {}^*\{H_i(x)dx^i\} \wedge \{H_i(x)dx^i\} \tag{3.20}$$

ただし、$H_i(x)dx^i = {}^*\{B_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j\}$ は磁場 1 形式です(計量のとり方については文献 [ZK] 及び [H] は電流密度を用いた別の表現を提唱しており、ある意味でその方が物理的であると言えます)。

このように、非圧縮性完全電磁流体の運動方程式もリー・ポアソン方程式としても、測地線方程式としても得られます。

3-5. 自由境界問題

以上は、流体に境界が無い場合に限定しましたが、境界が固定されている問題にも拡張されています。無限次元幾何学の方法をより広い範囲に適用することを目指して、流体の境界も運動するような場合を考えましょう。

動く境界をもつ連続体の運動は、微分同相写像群のかわりに埋め込み写像の集合を用います。この埋め込み写像の集合はもはやリー群ではありませんが、位相が定義されて無限次元の多様体になります。

物理空間 M の閉領域 D を最初に流体が占めていた領域とすると、この流体の運動は、D から M への C^∞ 埋め込み写像のつくる多様体 $Embb(D,M)$ 上の一点の運動に置き換えることができます(文献 [M2])。しかし、ここではこの多様体を拡大することによって、リー・ポアソン方程式やリーマン接続による測地線方程式として運動方程式を得ることを試みましょう。

次に、等エントロピー流を考えましょう。この為には多様体もそれに作用する群も拡大しなくてはなりません。最初に、物理空間 M の上の直線をファイバーとするファイバー束 $E(M)$ を考えます。この $E(M)$ の断面の集合 $\Gamma(E(M))$ は、質量密度とエントロピー密度に関係する 2 つの M 上の関数の空間になっています。

(3.21) $$\Gamma(E(M)) = \Lambda^0(M) \times \Lambda^0(M)$$

このとき、$Embb(D,M)$ 上に直線をファイバーとするファイバー束 $E(Embb(D,M))$ が次のように得られます。

(3.22) $$E(Embb(D,M)) = \left\{ \left(\psi, f|_\psi\right) \middle| \ \psi \in Embb(D,M),\ f(\psi(x)) \in E_{\psi(x)}(M) \ \ for\ \ all\ \ x \in D \right\}$$

ただし、$E_{\psi(x)}(M)$ は $\psi(x) \in M$ における $E(M)$ の元の集合です。

この多様体 $E(Embb(D,M))$ には $S(M)$ が作用します。つまり、$\Psi = \left(\psi, f|_\psi\right) \in E(Embb(D,M))$, $\Phi = (\phi, \sigma) \in S(M)$ に対して、

(3.23) $$\Phi\Psi = (\phi,\sigma)\left(\psi, f|_\psi\right) = \left(\phi \circ \psi, (\sigma + \phi^* f)|_{\phi\circ\psi}\right)$$

従って、前章との対応関係は、

(3.24) $$G = S(M), \quad \Sigma = E(Embb(M))$$

さて、次のようなハミルトニアンが $T^*E(Embb(M))$ 上に $\alpha_t|_{\psi_t} = \left(\rho_t \otimes u_t|_{\psi_t}, \rho_t|_{\psi_t}\right) \in T^*_{\psi_t}E(Embb(M))$ に対して定義されている場合を考えましょう。

$$H_{T^*E(Embb(M))}\left(\psi_t,\alpha_t\big|_{\psi_t}\right)=\frac{1}{2}\int_D \nu_{\psi_t(x)}\rho_t^{\psi_t D}(\psi_t(x))g_{ij}u^i(\psi_t(x))u^i(\psi_t(x))$$
$$+\int_D \nu_{\psi_t(x)}\rho_t^{\psi_t D}(\psi_t(x))U\left(\rho_t^{\psi_t D}(\psi_t(x)),S\rho_t^{\psi_t D}(\psi_t(x))\right)$$

ここで、$supp(\rho_t^{\psi_t D})=\psi_t D\in M$ です。これは丁度、境界に表面張力や外力などが働かない圧縮完全流体または弾性体の運動を考えることに対応します。

このとき、モーメント写像 $\tilde{J}$: $T^*E(Embb(M))\to S(M)$ を

$$\tilde{J}\left(\psi,\alpha_t\big|_{\psi_t}\right)=\left(\rho_t^{D_t}\otimes u_t,\rho_t^{D_t},s_t^{D_t}\right)$$
$$=\left(\rho_t^{\psi_t D}\otimes u_t,\rho_t^{\psi_t D},S\rho_t^{\psi_t D}\right)$$

とみると、右不変ハミルトニアンは次のようになります。

$$H\left(\tilde{J}\left(\psi_t,\alpha_t\big|_{\psi_t}\right)\right)=\frac{1}{2}\int_M \nu_x\rho_t^{D_t}(x)g_{ij}u^i(x)u^i(x)$$
$$+\int_M \nu_x\rho_t^{D_t}(\psi_t(x))U\left(\rho_t^{D_t}(\psi_t(x)),s_t^{D_t}(\psi_t(x))\right)$$

このようにして、運動方程式を $s^*(M)$ 上のリー・ポアソン方程式とみることができます。ここで、注意すべきことは、類似の方法によって $s^*(D)$ 上のリー・ポアソン方程式とみる力学系の簡約ができますが、今述べた方法は力学系の簡約ではなく、力学系の拡張を与えているのです。

また、非退化なリーマン構造は次のように与えられます。

$$\left\langle\!\left\langle V_1\big|_\psi,V_2\big|_\psi\right\rangle\!\right\rangle\Big|_\psi=\int_M \nu_x\rho_\psi^{\psi D}(x)g_{ij}(x)u_1^i(x)u_2^i(x)$$
$$+\int_M \nu_x\frac{2\rho_\psi^{\psi D}(x)}{U\left(\rho_\psi^{\psi D}(x),s_\psi^{\psi D}(x)\right)}U_1(x)U_2(x)$$

ここで、$\rho_\psi^{\psi D}(\psi(x))\nu_{\psi(x)}=\rho_0^D(x)\nu_x$ です。この計量から得られるリーマン接続によって得られる測地線の方程式が運動方程式を与えるはずです。

以上の方法は、非圧縮性流体の場合や表面張力がある場合にも適用できます。

3-6. 不安定性の解析

2-5 において述べた方法で、有限変分に対する非線形不安定性を調べることができます。

また、無限次元の曲率の計算はフーリエ成分によって多く行われてきましたが、圧縮性流体などの場合は文献 [O2] にみられる空間座標を用いた方法が有効であることが分かっています。

Section 4　不可逆過程への挑戦

自然界の現象論の殆どは時間に対して不可逆な過程です。しかし、今まで扱ってきた方法はすべて変分原理に基づいた時間に対して可逆な運動にしかそのままでは適用できません。そこで、不可逆過程に対して次のようなアプローチが考えられます。

1. 不可逆過程は可逆過程とは根本的に違うので、変分原理などの使用に意味はないので、この方法はあきらめる。

2. 非平衡物理学で知られている局所ポテンシャルの方法をはじめとする何らかの拡張された変分原理を適用する。

3. 摂動的な外力項として可逆過程の運動方程式に加える。

4. 時間を測地線のパラメータと拡散のパラメータに分離して、部分的に変分原理を用いる。

ここでは、3と4の観点で考えてみましょう。

3 の立場では、散逸項がゼロである場合にもとの可逆過程の運動方程式に戻らなければなりません。もしこの仮定が満たされていて、散逸項が線形演算子 D をとおして測地線方程式 (2.26) に加わる次のような場合、

(4.1)
$$\hat{\nabla}_{V_t|_{X_t}} V_t|_{X_t} = DV_t|_{X_t}$$

ヤコビ方程式は次のようになります。

(4.2)
$$\hat{\nabla}_{V_t|_{X_t}} \hat{\nabla}_{V_t|_{X_t}} W_t|_{X_t} = -\hat{R}(W_t|_{X_t}, V_t|_{X_t})V_t|_{X_t} + D\left[W_t|_{X_t}, V_t|_{X_t}\right]$$

従って、不安定性の条件は、

(4.3)
$$\left\langle\!\left\langle W_t|_{X_t}, \hat{R}(W_t|_{X_t}, V_t|_{X_t})V_t|_{X_t} \right\rangle\!\right\rangle\Big|_{X_t} - \left\langle\!\left\langle W_t|_{X_t}, D\left[V_t|_{X_t}, W_t|_{X_t}\right] \right\rangle\!\right\rangle\Big|_{X_t} \le 0$$

今報告ではじめて示された不安定性の条件は、<u>第 1 項の非線形の効果と第 2 項の散逸の効果のバランス</u>を表しています。

このように、散逸項を摂動として加えることが可能な場合、時間的に不可逆な多くの物理系も扱い得ることになります。

具体的な例として、境界のない多様体 M 上の非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式が得られます。

$$\partial_t u_t + u_t \cdot \nabla u_t + \nabla p = \nu \Delta u_t , \qquad \nabla \cdot u_t = 0 \tag{4.4}$$

散逸項を外力項として方程式に入れる方法は文献 [EM] によってナビエ・ストークス方程式の短時間での解の存在と一意性の証明に用いられましたが、今報告はこれを不安定性の解析に用いる可能性を指摘しました。

ところで、散逸項がゼロである場合にもとの可逆過程の運動方程式に戻らないような場合、散逸項を摂動として扱うわけにはいきません。例えば、固定された境界をもつ非圧縮性完全流体の場合がそのような場合になります。つまり、粘性がない場合はスリップ条件が境界に課せられますが、粘性がある場合にはノン・スリップ条件が課せられ、状況は一変してしまいます。このような場合は、流体の存在している領域を含むような境界を持たない多様体上の流れを考え、以下に述べる方法のもとにノン・スリップ条件を満たすような変分をとります。しかし、詳しくは別の機会にゆずります。

それでは、4 の考え方をみてみましょう。これは、時間を散逸に関わる部分とそうでない部分に分ける方法です。まず、$R\times R^+$ 上の曲線 (s,τ): $\underset{\textit{an open interval}}{I\subset R^+} \to R\times R^+$ を考えます。つまり、

$$(s(t), \tau(t)) \in R\times R^+ \tag{4.5}$$

さらに、速度場がこの曲線に依存して、次のように書けるとします。

$$\partial_s u_{(s,\tau)} + u_{(s,\tau)} \cdot \nabla u_{(s,\tau)} + \nabla p = 0, \quad \partial_\tau u_{(s,\tau)} = \nu \Delta u_{(s,\tau)} , \quad \nabla \cdot u_{(s,\tau)} = 0 \tag{4.6}$$

この考え方では、個々の式を変分するときに、境界条件を変えないようにパラメーター $(s(t),\tau(t))$ を $(s(t)+r(t),\tau(t))$ へとずらすことができます。

Section 5　　おわりに

表題とは裏腹に、今報告は流体をはじめとする力学系とリー群との関係や、測地線としてみなした場合の不安定性の解析などの一般的で、ややピン・ボケなものになってしまいました。しかし、この報告で新しく提起された自由境界問題についてのアイディアや、不可逆過程の安定性に関するアイディアは今後発展させる価値のあるものではなかろうかと思われます。

今後は、これらのやや未開発の方法を発展させて、具体的な問題に応用されることが期待されます。

References

[AbM] R. Abraham and J.E. Marsden, 1978, Foundation of Mechanics, 2nd edn (Reading, MA: Addison-Wesley)

[Ar1] V.I. Arnold, 1966, Ann. Inst. Fourier, **16** 319

[Ar2] V.I. Arnold, 1978, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Appendix 2 (New York: Springer)

[EM] D. Ebin and J.E. Marsden, 1970, Ann. Math. **90** 102

[H] Y. Hattori, 1994, J. Phys. A **27** L21

[HK] D. Holm and B. Kupershmidt, Physica D **6** 347

[KNH] T. Kambe, F. Nakamura and Y. Hattori, 1992, Toplogical Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas, eds. K. Moffatt et al. (Kluwer, Dordrecht, 1992), pp. 493-504

[L] A. Lukatsky, 1981, Russian Math. Survey **36** 179

[M1] J.E. Marsden, 1976, Comm. in. P.D.E. **1** 215

[M2] J.E. Marsden,1981 , Lecture on Geometric Methods in Mathematical Physics", (Society for Industrial and Applied Mathematics : Philadelphia, Pennsylvania) Lecture 2

[MRW] J.E. Marsden, T. Ratiu and A. Weinstein, 1984, Trans. Am. Math. Soc. **281** 147

[MW] J.E. Marsden and A. Weinstein, 1983, Physica D **7** 305

[O1] T. Ono, 1995, Physica D **81** 207

[O2] T. Ono, 1995, J. Phys. A **28** 1737

[ZK] V. Zeitlin and T. Kambe, 1994, J.Phys. A **26** 5025